Turbulence Theory and Modeling

Hyon Kook MYONG

School of Mechanical Engineering

http://cfd.kookmin.ac.kr

국민대학교
KOOKMIN UNIVERSITY

Contents

Reynolds 분해-1

<u>Reynolds 분해</u>(평균의 정의):

시간평균; $\overline{f_T}(\vec{x}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\vec{x},\ t)dt$: stationary turbulence에 적합 (1.1)

체적평균; $\overline{f_v}(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{L^3}\int\int\int_0^L f(\vec{x},\ t)\ dx_1\cdot dx_2\cdot dx_3$: homogeneous flow (1.2)

면 평균; $\overline{f}(y,t) = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^2}\int\int_0^L f(\vec{x},\ t)dx\cdot dz$ (1.3)

집합평균; $\overline{f_E}(\vec{x},t) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_1^N f_n(\vec{x},\ t)$: ensemble average (1.4)

위상평균; $\overline{f}(\vec{x},\theta) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_1^N f(\vec{x},\ \theta+2\pi n)$ (1.5)

일반적으로 현상이 동질성(homogeneity)을 가지는 좌표에 대한 평균을 이용한다.

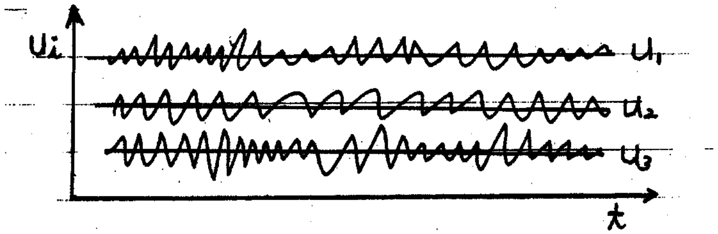
steady

stationary

*** stationary, homogeneous=ergodic hypothesis**

--> 시간, 체적, 집합 평균이 동일함

Reynolds 분해-2



$$f=\overline{f}+f' \tag{1.6}$$

Def.; $\overline{f}$: 평균

f': 변동량

$$\overline{f'}=0,\quad \overline{\overline{f}}=\overline{f},\quad \overline{\overline{f}\cdot\overline{g}}=\overline{f}\cdot\overline{g},\quad \overline{\overline{f}\cdot g'}=0 \tag{1.7}$$

비압축성 유체: $u_i=\overline{u_i}+u_i', \quad p=\overline{p}+p'$ (1.8)

압축성 유체: $\rho=\overline{\rho}+\rho'$

$$\overline{\rho u_i}=\overline{\rho}\cdot\tilde{u}_i \rightarrow \tilde{u}_i=\frac{1}{\overline{\rho}}\overline{\rho u_i} \tag{1.9}$$

Farve's average

* 이하 $\rho=const.$, $\mu=const.$ 인 경우를 생각한다.

Reynolds 분해-3

연속방정식

$$u_{i,i}=0 \quad \rightarrow \quad \overline{(\overline{u_i}+u_i'),_i}=0$$

$$\therefore \overline{u_i}_{,i}=0 \qquad (1.10)$$

$$u_i{}'_{,i}=0 \qquad (1.11)$$

Momentum Equation (N-S Eq.)

$$\dot{u}_i+u_j u_{i,j}=-\frac{1}{\rho}p_{,i}+\nu u_{i,jj}$$

$$(\overline{u_i}+u_i')+(\overline{u_j}+u_j')\cdot(\overline{u_i}+u_i')_{,j}=-\frac{1}{\rho}(\overline{p}+p')_{,i}+\nu(\overline{u_i}+u_i')_{,jj} \qquad (1.12)$$

전체의 평균을 취하면

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\overline{u}}_i+\overline{u_j}\cdot\overline{u_i}_{,j}&=-\frac{1}{\rho}\overline{p}_{,i}+\nu\overline{u_i}_{,jj}+(-\overline{u_i'u_j'})_{,j}\\&=-\frac{1}{\rho}\overline{p}_{,i}+[\nu\overline{u_i}_{,jj}+(-\overline{u_i'u_j'})_{,j}]\end{aligned}} \qquad (1.13)$$

(Reynolds Equation)

Reynolds 분해-4

$$\because \overline{u_j' u_i',_j} = \overline{(u_j' u_i'),_j} - \overline{u_j',_j u_i'} = \overline{(u_j' u_i'),_j}$$

$\Rightarrow (-\rho \overline{u_i' u_j'})$는 평균 유체에 대해서 겉보기 응력을 발생한다.

ex.) 2차원 정상 경계층 유동인 경우 ($\frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial x}$)

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'}) \qquad (1.15)$$

$$-\rho R_{ij} = -\rho \overline{u'v'} \text{ ; Reynolds stress (tensor)} \qquad (1.16)$$

** 6개의 부가적인 미지수가 더해짐
--> 방정식 계는 수학적으로 닫혀지지 않음
--> Closure Problem

* $-\rho \overline{u'v'}$는 난류 현상 중에서 큰 영향을 보여, 무시할 수 없는 사실이 경험적으로 알려 짐.

Reynolds 분해-5

Closure Problem (난류의 주된 명제)

(완결 가설)

$\overline{u'v'}$를 예를 들어 $\overline{u}_{i,j}$의 함수로 관계 짓는 등의 모델화에 의해 수학적으로 닫혀진 계를 얻음.

분자점성과의 수학적 유사성을 가정하는 방법 (공학적)

$$-\overline{u_i' u_j'} = -\frac{1}{3}\overline{u_k' u_k'}\,\delta_{ij} + 2\,\nu_t\,S_{ij} \tag{1.17}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{j,i}\right)$$; Strain tensor

ν_t ; Eddy diffusivity (와동점성 계수, 난류 점성계수)

ex)

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$$

Reynolds 분해-6

Energy Equation

$$\dot{(\overline{T}+T')}+[(u_j+u_j')(\overline{T}+T')]_{,j} = \varkappa(\overline{T}+T')_{,jj}$$

의 전체 평균을 취하면

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\overline{T}}+(\overline{u_j}\cdot\overline{T})_{,j} &= \varkappa\overline{T}_{,jj}+(-\overline{u_j'T'})_{,j} \\ &= [\varkappa\overline{T}_{,j}+(-\overline{u_j'T'})]_{,j}\end{aligned}} \tag{1.18}$$

$$q_{ti}=-\rho C_p\overline{u_i'T'} \quad ;\ \text{Turbulent Heat Flux} \tag{1.19}$$

$$q_{ti}=-\lambda_t\overline{T}_{,i}=-\rho C_p\varkappa_t\overline{T}_{,i} \tag{1.20}$$

where $\varkappa_t$; Thermal eddy diffusivity

ex) 2-D B.L. 인 경우

$$-\rho C_p\overline{v'T'}=\lambda_t\frac{\partial\overline{T}}{\partial y} \tag{1.20'}$$

Reynolds 분해-7

난류 Prandtl 수

$$\mathrm{Pr}_t = \frac{C_p \mu_t}{\lambda_t} = \frac{\nu_t}{\varkappa_t} \tag{1.21}$$

(*) $\mathrm{Pr} = \dfrac{C_p \mu}{\lambda}$

* ν_t 가 알려져 있는 경우, 온도를 수동적인 수송량으로 간주할 때 Pr_t 는 근사적으로 일정한 값을 가진다.

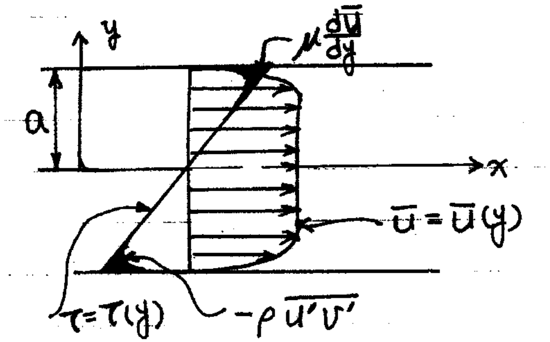
ex) $\mathrm{Pr}_t = 0.9 \sim 1.0$ (wall turbulence)

$\mathrm{Pr}_t \simeq 0.5$ (2-D free turbulence)

$\mathrm{Pr}_t \simeq 0.7$ (axisymmetric turbulence)

Reynolds 분해-8

(*) 2차원 평판 사이의 유동 (정상, 물성치 일정)



Fully developed

$$\frac{\partial}{\partial x}(Statistical\ Mean) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} \text{ 이외의 } \frac{\partial}{\partial x}(\ ) = 0$$

- $$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \rightarrow \bar{v} = const = 0$$
  $$\bar{u} = \bar{u}(y)$$

- $$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'^2}) - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'})$$
  $$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'^2}) - \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'v'})$$

Reynolds 분해-9

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\text{는 } y\text{에 의존 안함.}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \left(-\overline{u'v'}\right)\right] = const$$

$$\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \left(-\overline{u'v'}\right) = C_1 y + C_2$$

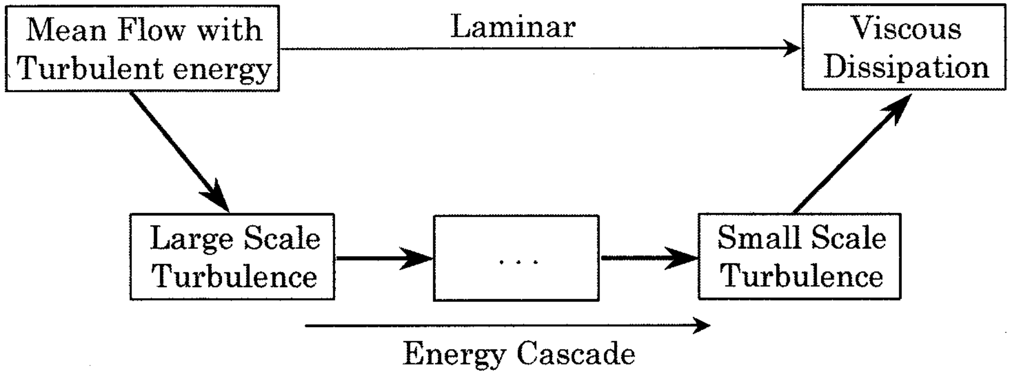
B.C. $y = 0\ ;\ -\overline{u'v'} = 0,\ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0$

$y = a\ ;\ -\overline{u'v'} = 0,\ \mu\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\Big|_a = -\tau_w$

$$\boxed{\frac{1}{\tau_w}\left[\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \left(-\rho\,\overline{u'v'}\right)\right] = -\frac{y}{a} \rightarrow \frac{\tau}{\tau_w} = -\frac{y}{a}}$$

난류의 생성 및 소산-1

유체 단위 질량당의 난류 운동에너지를 고려한다.



비압축성 유체; 운동량방정식 $\times\ u_i$

$$u_i\,\dot{(\rho u_i)} + u_i(\rho u_j u_i)_{,j} = -u_i p_{,i} + u_i \mu u_{i,jj}$$

$$\rightarrow\ \dot{(u_i u_i/2)} + u_i u_j u_{i,j} = -\frac{1}{\rho} u_i p_{,i} + \nu u_i u_{i,jj}$$

$$\rightarrow\ \dot{(u_i u_i/2)} + u_j(u_i u_i/2)_{,j} = -\frac{1}{\rho} u_i p_{,i} + \nu u_i u_{i,jj} + (\nu u_i u_{j,ij})$$

$$= -\frac{1}{\rho}(u_i p)_{,i} + \nu[u_i(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} - \nu u_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (2.1)$$

난류의 생성 및 소산-2

운동에너지: $K = u_i u_i/2$ (2.2)

$$\frac{DK}{Dt} = -\frac{1}{\rho}(u_i\, p)_{,i} \quad + \quad \nu(2u_i S_{ij})_{,j} \quad - \quad 2\nu u_{i,j} S_{ij} \tag{2.3}$$

(압력일)　(점성에 의한 확산)　(점성소산)>0

난류의 경우; 식(1.13) × $\overline{u}_i$ 의 평균을 취함.

$$\overline{u}_i(\dot{\overline{u}}_i + \overline{u}_j \cdot \overline{u}_{i,j}) = \overline{u}_i\left[-\frac{1}{\rho}\overline{p}_{,i} + \nu\,\overline{u}_{i,jj} + (-\overline{u_i' u_j'})_{,j}\right] \Rightarrow$$

$$(\overline{u}_i\overline{u}_i/2) + (\overline{u}_j \cdot \overline{u}_i \cdot \overline{u}_i/2)_{,j} = -\frac{1}{\rho}(\overline{p}\,\overline{u}_i)_{,i} + \nu\,\overline{u}_i\,\overline{u}_{i,jj} - \overline{u}_i\,(\overline{u_i' u_j'})_{,j}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}(\overline{u}_i\overline{u}_i/2) = \left[-\frac{1}{\rho}(\overline{p}\,\overline{u}_j) + \nu\,\overline{u}_i(\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{j,i}) - \overline{u}_i\,\overline{u_i' u_j'}\right]_{,j}$$

(확　산)

$$-(-\overline{u_i' u_j'})\,\overline{u}_{i,j} \quad - \quad \nu\,\overline{u}_{i,j}(\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{j,i}) \tag{2.4}$$

*(**<u>Production</u>**)　(점성소산)

(*) $\boxed{\text{소산} \propto (\text{공간적 구배})^2}$, $\left(\frac{\triangle V}{\triangle L}\right)^2$

$= 2\mu S_{ij}\,\overline{u}_{i,j} = \mu\,\overline{u}_{i,j}(\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{j,i})$

난류의 생성 및 소산-3

식(1.12)-식(1.13)

$$(\overline{u_i}+u_i')_{eq}-\overline{u_i}_{eq}$$

$$\dot{u}_i'+(\overline{u_j}u_i'),_j+(u_j'\overline{u_i}),_j+(u_i'u_j'),_j-\overline{(u_i'u_j')},_j$$

$$=-\frac{1}{\rho}p',_i+\nu u_i',_{jj} \qquad (2.5)$$

이 식에 u_i'를 곱해서 평균을 취함.

$$\frac{D}{Dt}(\overline{u_i'u_i'}/2)=[-\frac{1}{\rho}(\overline{pu_j}),+\nu\overline{u_i'}(\overline{u_i'},_j+\overline{u_j'},_i)-\overline{u_j'u_i'u_i'/2}],_j$$

(확산항 $J_j,_j$)

$$+(-\overline{u_i'u_j'})\overline{u_i},_j-\nu\overline{u_i'},_j(\overline{u_i'},_j+\overline{u_j'},_i) \qquad (2.6)$$

*(**<u>Production, P</u>**) (점성소산, D)

Define; $k=\overline{u_i'u_i'}/2$; **난류 운동에너지**

$$\frac{Dk}{Dt}=P-D+J_j,_j \qquad (2.7)$$

$$P\equiv(-\overline{u_i'u_j'})\overline{u_i},_j=(Reynolds\ stress)\times(mean\ velocity\ gradient)>0$$

난류의 생성 및 소산-4

(*) 만약 난류 유동장이 정상적으로 유지되기 위해서는 $P > 0$ 이어야 함.
또한, $P \sim D$ 가 되기 위해서는 변동량의 최소 스케일이 충분히 작아야 함.

(*) $D > 0$ 또는 난류장이 Homogeneous인 경우,

$$D = 2\nu \overline{s'_{ij} s'_{ij}} = \frac{1}{2} \nu \overline{(u_i',_j + u_j',_i)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \nu [\overline{u_i',_j u_i',_j} + \overline{u_j',_i u_j',_i} + 2\overline{u_i',_j u_j',_i}]$$

$$= \nu \overline{u_i',_j u_i',_j} + \nu [\overline{(u_i',_j u_j'),_i} - \overline{u_i',_{ji} u_j'}]$$

(= 0 for homo. field) (= 0)

$$= \nu \overline{u_i',_j u_i',_j} \equiv \varepsilon \quad \text{(Homogeneous Dissipation)} \tag{2.8}$$

난류의 생성 및 소산-5

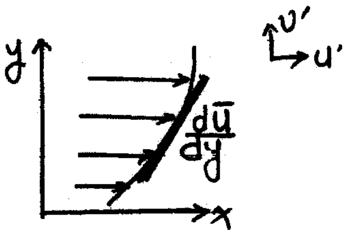
(*) **확산항**

$u_i' = 0$ 이 되는 경계(고체벽면, 자유유동)로 둘러쌓인 C.V. V를 고려하면,

$$\int\int\int J_{j,j}\, dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 = 0 \qquad (2.9)$$

즉, Net 에너지 Balance에 관여하지 않음 !!!!!!!!!

ex) 2차원 평균유동



$$\overline{u_{i,j}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d\overline{u}}{dy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = -\overline{u'v'}\frac{d\overline{u}}{dy}$$

만일 변동량 성분이

$u' = a\ \cos\omega t, \quad v' = b\ \cos\omega t + c\ \sin\omega t$ 로 나타내어진다고 하면

$-\overline{u'v'} = -ab/2$

즉, <u>v' 성분 중, u'와 동일 주파수, 동일 위상 성분만이 **Reynolds stress에 기여한다**</u>!!!!

실험적으로 u', v'의 상관계수는 <u>0.4 ~ 0.5</u> 값을 가진다.

스칼라량에 대한 난류의 생성 및 소산

온도 변동량에 대해 고려하면

$$\frac{D(\overline{T'^2}/2)}{Dt} = -\underbrace{\overline{T'u_j'}\cdot\overline{T},_j}_{\text{(i)}} - \underbrace{\chi\,\overline{(T,'_j T,'_j)}}_{\text{(ii)}} - \underbrace{[\,\overline{u_j' T'^2} - \chi(\overline{T'^2}/2),_j],_j}_{\text{(iii)}} \qquad (2.10)$$

(i) 온도 변동량의 생성

(ii) 온도 변동량의 소산

(iii) 온도 변동량의 확산

(Note) 온도 변동량 방정식 중에는 압력 변동성분이 없음!!!!